ユークリッド原論を用いた余弦定理の指導

—平成23年度≪数学・授業の達人≫大賞　報告—

数学科　戸田　　偉

（要旨）高校で学習する余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$は，三平方の定理の拡張である。三平方の定理の証明には面積を用いたものが良く知られているが，余弦定理を見て$2bc\cos A$の意味するものに気付く生徒は少ない。そこで，ユークリッド原論を題材に，余弦定理に現れる面積の図形的意味に生徒が気付く授業を試みた。また，紀元前から（cosineの記号が生まれる前から）余弦定理があったことにも生徒と驚きを共有したいと考えた。

キーワード：ユークリッド原論　余弦定理

1．はじめに

三平方の定理は生徒にとって馴染み深く，等積変形などの面積を利用した証明を理解している生徒も多い。そこで，三平方の定理の拡張である第２余弦定理（以下，余弦定理）

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

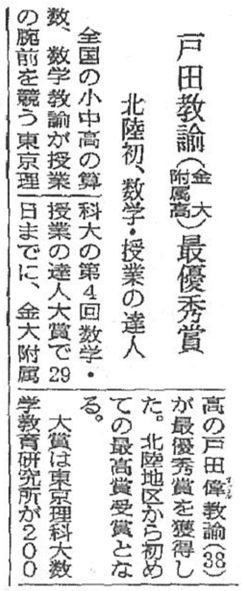
についても，a^2, b^2, c^2, $bc\cos A$の表している面積に気付いて欲しいと考えた。

具体的には，「余弦定理」という言葉は出さずに、題名を「ユークリッド原論に挑戦！」とし，ユークリッド原論第Ⅰ巻命題47（三平方の定理）・第Ⅱ巻命題13（鋭角三角形の場合の余弦定理）の再証明を，①cosineを利用する方法　②等積変形を用いた方法の2通りで学習し，第Ⅱ巻　命題12（鈍角三角形の場合の余弦定理）はヒントを与えて宿題とした。再発見も発見である。「cosAの記号が生まれる1000年以上昔から余弦定理は発見されていた！」という事実に，生徒が気付く授業を目指した。

後世の想像図

2．≪数学・授業の達人≫大賞とは？

≪数学・授業の達人≫大賞とは，全国の小中高の算数・数学教師が授業の腕前を競うもので，東京理科大学数学教育研究所が2008年度（平成20年度）から毎年開催している。秋山仁教授（審査委員長・東海大学教育開発研究所所長）等が授業の様子を撮影したビデオなどを参考に，最優秀賞２人，優秀賞２人を選考した。



戸田教諭（金大附属高）最優秀賞

北陸初、数学・授業の達人

全国の小中高の算数、数学教諭が授業の腕前を競う東京理科大の第4回数学・授業の達人大賞で29日までに、金大附属高の戸田偉教諭(38)が最優秀賞を獲得した。北陸地区から初めての最高賞受賞となる。

大賞は東京理科大数学教育研究所が200

2011・11・(水)　北國新聞　日刊

なお，平成23年度のもう一人の最優秀賞は，「マッチ棒の本数はいくつ？」（盛山隆雄先生・筑波大学附属

小学校）であった。

3．授業の概要

以下，実際の授業の流れに沿って，背景となったユークリッド原論の題材にも適宜触れていく。実際の授業の指導案は，添付資料を参照されたい。

> 『ユークリッド原論』は、紀元前３世紀ごろにエジプトのアレクサンドリアで活躍した数学者エウクレイデス（英語式にはEuclid（ユークリッド））によって編纂された数学書です。今日は、その中の３つの定理に挑戦してみましょう。

> 第Ｉ巻 定理47
> 「直角三角形で、直角に対する辺上の正方形は直角にはさまれている辺上の正方形の和と等しい。」

問１ これは，現在私たちが何と呼んでいる定理のことを述べているのでしょうか。

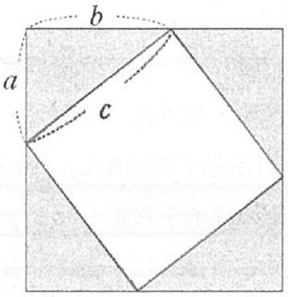
…この問いには，どの生徒も抵抗なく三平方の定理（別名ピタゴラスの定理）と答えることが出来た。

そこで，「では，証明できますか？」と尋ねたところ，2通りの解答が返ってきた。

三平方の定理の証明$\boxed{1}$

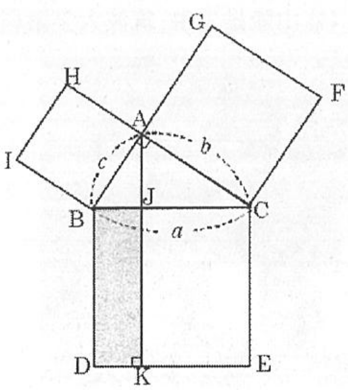
右図より

$$c^2=(a+b)^2-4\times\frac{1}{2}ab$$
$$=a^2+b^2$$

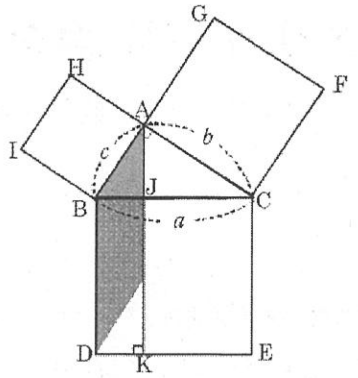


三平方の定理の証明$\boxed{2}$

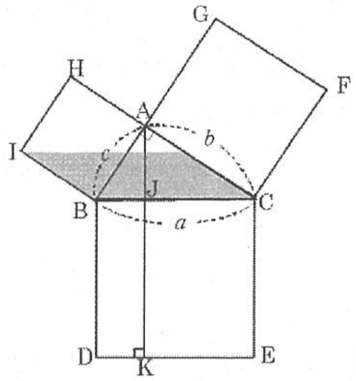
（等積変形によるもの）



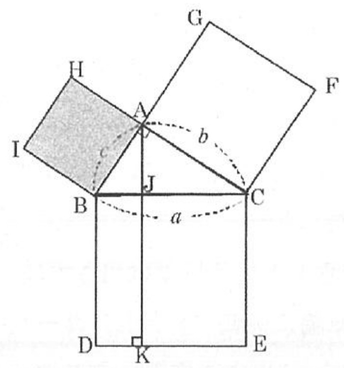
① 左図で，点Dを通り，ABに平行な直線と線分AKの交点をLとする。



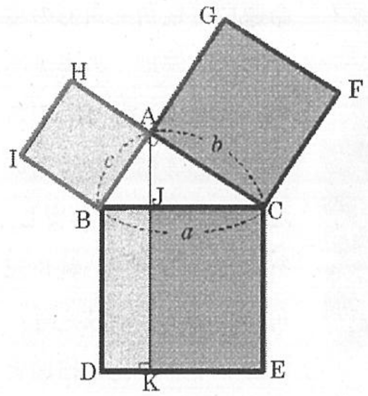
② 長方形BDKJと平行四辺形ABDLの面積は等しい。



③
∠ABD＝∠IBC,
AB＝IB,
BD＝BCだから,
②③の平行四辺形は合同で面積は等しい



④
③の平行四辺形と正方形ABIHの面積は等しい。



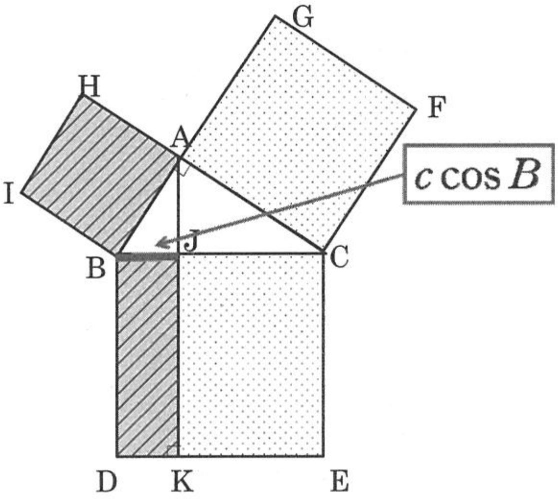
⑤ ゆえに
長方形BDKJ
＝正方形ABIH
同様に
長方形JKEC
＝正方形ACFG
だから,
$a^2=b^2+c^2$

以上２通りの証明は，中学校でも学んだものだが，高校で学習した三角比を用いた第３の証明を学習し

た。

問２　図の直角三角形ABCにおいて，

BC=a, CA=b, AB=cとする。



⑴　BJの長さを，cと∠ABCの三角比を用いて表しなさい。

(BJ=ABcosB=$c$cosB)

⑵　長方形BDKJと正方形ABIHの面積が等しいしいことを示しなさい。

(長方形BDKJ = $a c\cos B = ac \times \dfrac{c}{a}$

$= c^2$=正方形ABIH)

⑶　定理47を証明しなさい。

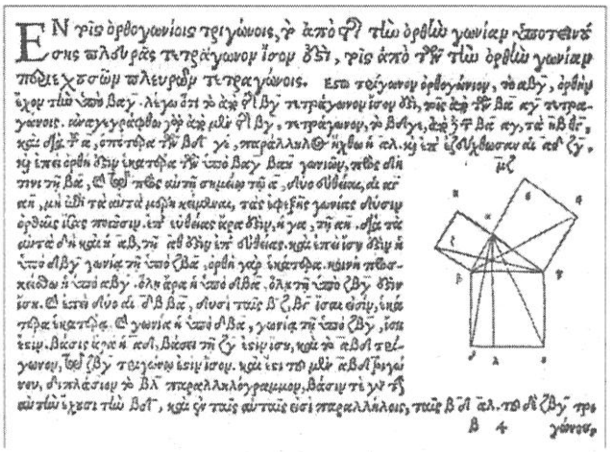
(⑵と同様に，斜線部どうし，打点部どうしの面積が等しいので，示された。)

【考察1】sinやcosのなかった当時，どのように⑵を示したのでしょうか？

(やはり，等積変形かなぁ…という感想を引き出す。)

ユークリッド原論における三平方の定理の証明

ユークリッド原論では，その２のように平行四辺形を用いるのではなく，三角形の等積変形を用いて証明している。以下の写真は，グリュナエウス版（1533年）のユークリッド原論（はじめてギリシャ語原文のユークリッド原論が印刷本として刊行されたもの）で，本校で採用している実教出版の教科書「数学Ⅰ」新訂版p. 6に掲載されているものである。



第Ⅱ巻 定理13

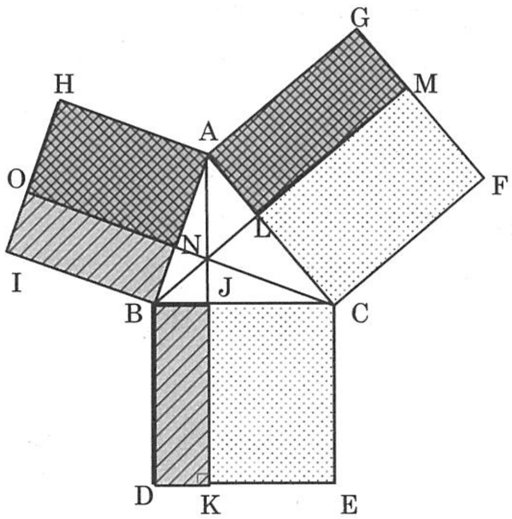
「鋭角三角形で，鋭角の対辺上の正方形は鋭角をはさむ２辺の上の正方形の和より，鋭角をはさむ辺のうちの１つとこの辺に垂線が下され、この鋭角への垂線によって内部に切り取られた線分によって囲まれている長方形の２倍小さい」

このままでは意味が分かりにくいので，次のようにステップをきざんだ。

問３　図の鋭角三角形ABCにおいて，

BC=a, CA=b, AB=cとする。定理13は，例えば「正方形BDEC=正方形ACFG+正方形ABIH

－２×長方形ALMG」…（※）という意味である。



⑴　ANの長さを，bと∠BACの三角比で表しなさい。(AN=$b$cosA)

⑵　長方形ALMGと長方形AHONの面積が等しいことを示しなさい。

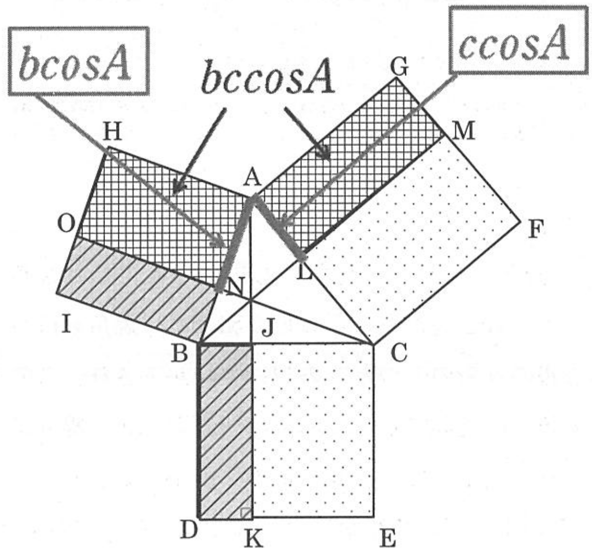
（長方形ALMG=AN×AH=$b$$c$cosA

また，AL=ccosAだから

長方形AHON=AL×AG=$b$$c$cosA

ゆえに　長方形ALMG=長方形AHON）

⑶　定理13，つまり（※）を証明しなさい。



（⑵と同様に考えると，斜線部どうし，打点部どうしの長方形の面積も等しい。よって，

正方形BDEC＝正方形ABIH+正方形ACFG

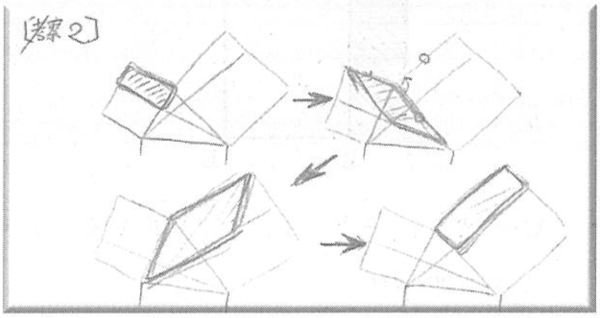
−2×長方形ALMG）

⑷　これは，現在私たちが何と呼んでいる定理のことを述べているのでしょうか。

（$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$　すなわち，（鋭角三角形の）余弦定理）

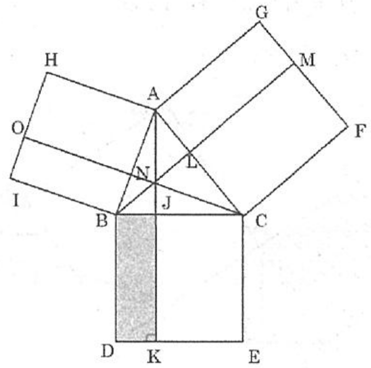
【考察２】sinやcosのなかった当時，どのように⑵を示したかを考えて下さい

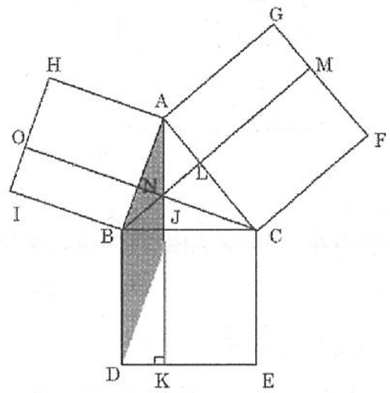
（考察２・３は宿題としたが、やはり「等積変形を用いたのでは？」と予想した生徒が多かった。

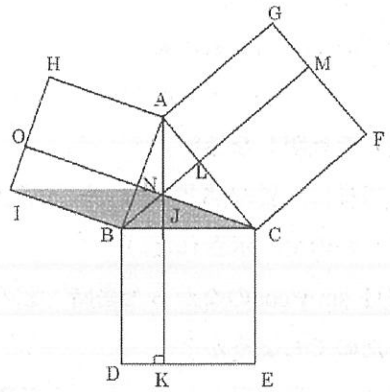


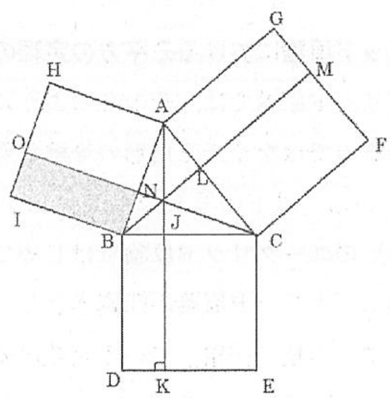
生徒の宿題プリントより

三平方の定理の場合と同様に，次のようになる。）









授業の最後に

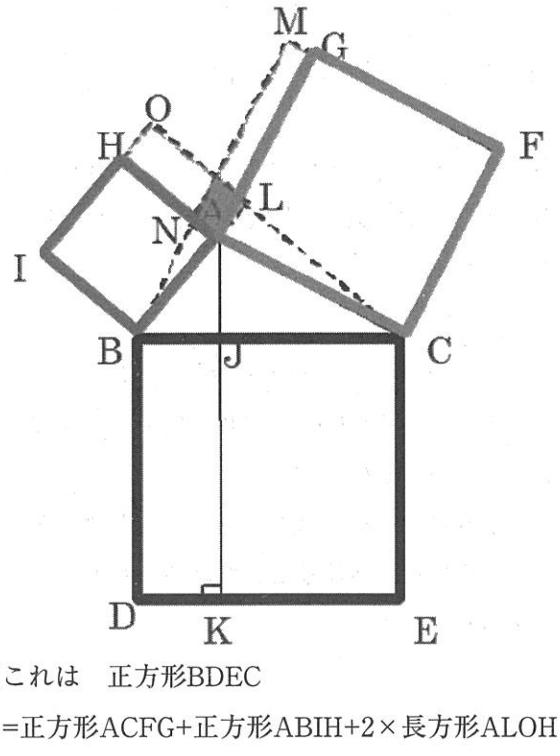
「今日の授業で学んだように，ユークリッド原論の第Ⅰ巻定理47には三平方の定理が，第Ⅱ巻定理13には鋭角三角形の余弦定理が，そしてその一つ前の第Ⅱ巻定理12には鈍角三角形の余弦定理が記載されています。最後の定理12（鈍角三角形の余弦定理）の証明は宿題としますので，次回までに考えてきてください。

それにしても，cosineの記号が生まれる前（紀元前3世紀）から，人類は，余弦定理を手に入れていたのですね！」

4．授業後の成果

【考察3】鈍角三角形の場合が第Ⅱ定理12に載っています。問3にならって，考えてみましょう。

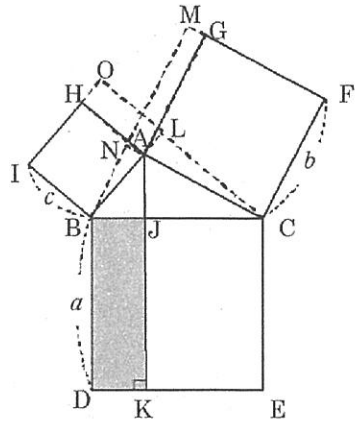
> 第Ⅱ巻 定理12
> 「鈍角三角形で，鈍角の対辺上の正方形は鈍角をはさむ2辺の上の正方形の和より，鈍角をはさむ辺のうちの1つとこの辺に垂線が下され、この鈍角への垂線によって内部に切り取られた線分によって囲まれている長方形の2倍大きい」

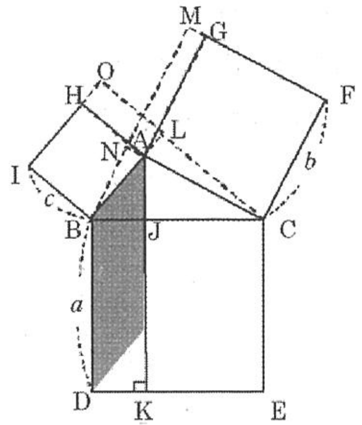


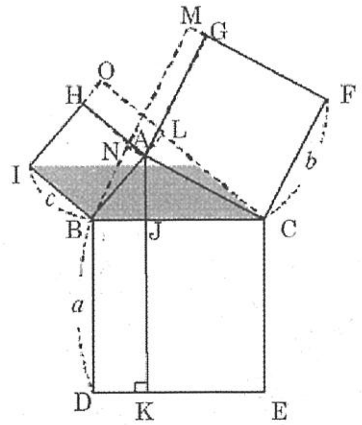
（これは　正方形BDEC

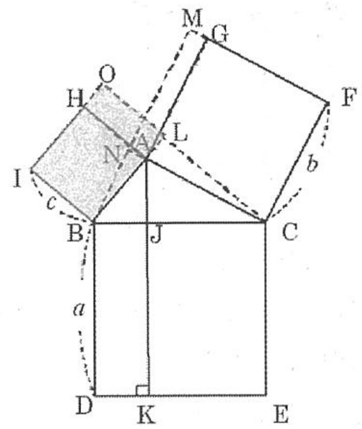
=正方形ACFG+正方形ABIH+2×長方形ALOH

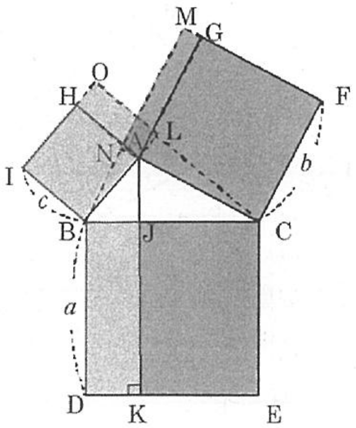
という意味である。以下は等積変形によるもの。）



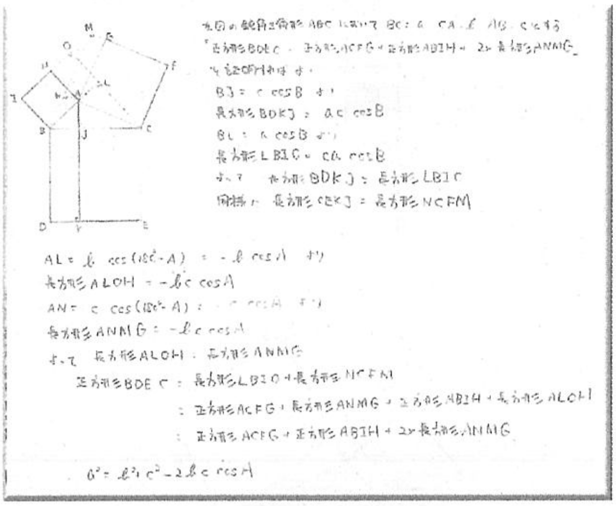


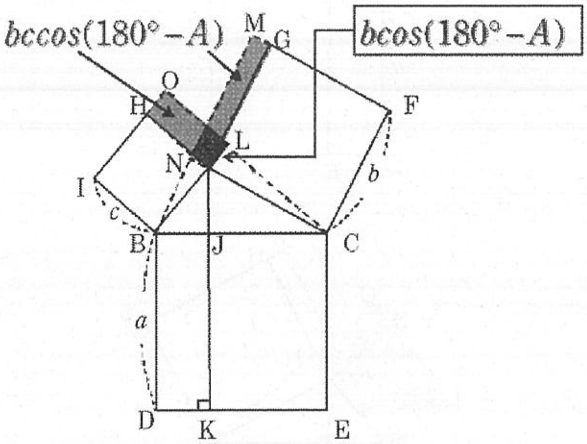






少し見にくいが，長方形AHOLとANMGの面積は等しい。等積変形でもできるが，下の生徒は現代の高校生らしく，三角比を用いている。





以上より，正方形BDEC

=正方形ACFG+正方形ABIH+2×長方形ALOH

すなわち，現代的に書くと

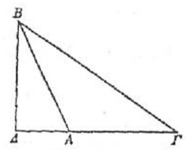
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\ (180°-\mathrm{A})$

ここで，cos（180° − A）=-cosA だから

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$

ユークリッド原論の証明

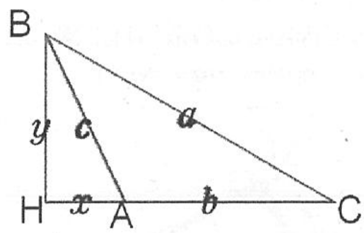
さて，ここまで「紀元前なら等積変形かな？」などと想像を巡らしながら検討してきたのであるが，実はユークリッド原論の証明では，三平方の定理以外は等積変形は用いていない。以下は，ユークリッド原論の翻訳本（参考文献[1]）からの抜粋である。



$AB\Gamma$ を鈍角 $BA\Gamma$ をもつ鈍角三角形とし，点 B から ΓA に垂線 $B\Delta$ がひかれたとせよ。$B\Gamma$ 上の正方形は BA，$A\Gamma$ 上の正方形の和より ΓA，$A\Delta$ にかこまれた矩形の2倍だけ大きいと主張する。

線分 $\Gamma\Delta$ は点 A において任意に分けられたから，$\Delta\Gamma$ 上の正方形は ΓA，$A\Delta$ 上の正方形と ΓA，$A\Delta$ にかこまれた矩形の2倍との和に等しい。双方に ΔB 上の正方形が加えられたとせよ。そうすれば $\Gamma\Delta$，ΔB 上の正方形の和は ΓA，$A\Delta$，ΔB 上の正方形と矩形 ΓA，$A\Delta$ の2倍との和に等しい。ところが Δ における角は直角であるから，ΓB 上の正方形は $\Gamma\Delta$，ΔB 上の正方形の和に等しい。そして AB 上の正方形は $A\Delta$，ΔB 上の正方形の和に等しい。ゆえに ΓB 上の正方形は ΓA，AB 上の正方形と ΓA，$A\Delta$ によってかこまれた矩形の2倍との和に等しい。したがって ΓB 上の正方形は ΓA，AB 上の正方形の和より ΓA，$A\Delta$ にかこまれた矩形の2倍だけ大きい。

よって鈍角三角形において鈍角の対辺の上の正方形は鈍角をはさむ2辺の上の正方形の和より，鈍角をはさむ辺の一つと，この辺へと垂線が下され，この鈍角への垂線によって外部に切り取られた線分とにかこまれた矩形の2倍だけ大きい。これが証明すべきことであった**)。



現代的にいうと，上図のような∠Aが鈍角である三角形ABCの頂点Bから直線ACに下した垂線の足をHとするとき

$a^2=y^2+(b+x)^2$

$\quad=b^2+(x^2+y^2)+2bx\cos(180°-\mathrm{A})$

ここで，$x^2+y^2=c^2$，$\cos(180°-\mathrm{A})=-\cos\mathrm{A}$ より

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$

このように，やや肩透かしを食らった感はあるが，三平方の定理を2回使うことで鈍角三角形の余弦定理を証明している。

5．おわりに

回収したプリントを見ると，鈍角三角形の場合の余弦定理を三角比や等積変形によって証明している生徒が多数いた。どちらかというと等積変形のインパクトが強かったらしく，三角比をこれから扱っていく上では痛し痒しではあった。

しかし，正解には至らなかったものの，普段数学の苦手な生徒がカラーペンを使って一生懸命に試みていたり，友達同士で教えあう姿も見られるなど，一定の効果はあったようだ。

今回の授業は，ユークリッド原論を忠実に再現したわけではないし，何かが出来るようになったわけでもない。しかし，$bc\cos A$のイメージはできたのではないかと思われる。何れにせよ，生徒は概ね積極的に取り組んでいたようだ。

謝辞

今回の授業は，正弦定理・余弦定理について一通り学習した後，１年Ａ組Ｂ組合同授業（86名）「ユークリッド原論に挑戦！」という題名で実施したものであるが，授業の原型は、平成23年度９月に本校で教育実習（２週間）を行った水上理栄さん（金沢大・伊藤伸也先生ゼミ，実習の指導教諭は戸田）の研究授業「等積変形による余弦定理の証明」（１年Ｃ組）である。

１年Ｃ組の授業では，次のようにした。

① 原論の話は出さなかった。
② 三平方の定理はあっさりと。鋭角三角形の余弦定理をメインに。鈍角三角形は宿題に。
③ 平行四辺形ではなく三角形の等積変形を用いた。
④ ９月中旬実施。余弦定理の導入。

大変面白い試みであったが，三平方の定理をもう少し掘り下げておいた方が，生徒の理解がより深まると思えた。また，目標（余弦定理の証明）が見えているより，「再発見」の要素を盛り込んだ方が面白いかと思い，1年ＡＢ組の授業では，次のようにしてみた。

① 原論の話をメインに。
② 三平方の定理の別証明を３通りやる。余弦定理という言葉は最後の問いまで出さなかったが，鋭角三角形の余弦定理をメインに。鈍角三角形は宿題に。
③ 平行四辺形の等積変形を用いた。
④ ９月下旬実施。余弦定理の学習後。

そしてビデオに撮り，水上さんと伊藤先生の了承を得た上で投稿・受賞したのである。

10月30日に東京理科大学で授賞式があり，審査委員長の秋山仁教授より，「教え込みではなく，『気付け〜！』とやっているところが良かった。」「生徒が良く考えている！」という嬉しい講評をいただいた。その後最優秀２名の模擬授業があり，夜には日本出版クラブ会館での受賞記念パーティーに参加させていただいた。その席で求められたスピーチを再録し，この稿を閉じたいと思う。

「今日は大勢の大学生・院生の皆さんがお手伝いをされていました。（東京理科大学は，教員採用数がとても多いそうです。）教師の卵の皆さんに，この場を借りてお伝えしたいと思います。

今日の授業の元になったのは，大学で先生の指導を受けて頑張ってきた，教育実習生の研究授業です。皆さん，今，一生懸命勉強して下さい。そこで面白いと思ったことを，是非書き留めておいてください。皆さんが面白いと思った教材・題材は，きっと何人かの生徒の心にも届くはずです。

今は教員と学生という立場ですが，将来ともに教壇に立つ同志として，遠い金沢の地から，皆さんの学習に実り多きことを願っています。」

〔参考文献〕

[1] ユークリッド原論[追補版]
（訳・解説者） 中村幸四郎，寺阪英孝，伊東俊太郎，池田美恵

[2] 実教出版 教科書「数学Ⅰ」新訂版
岡本和夫 ほか

数学科学習指導案

学　　校　　名　金沢大学附属高等学校
指導者 職・氏名　教諭　　戸　田　　偉

指導日時・教室　　平成　２３年　９月　２９日（木）　５限目　教室名　美術・書道教室
対象生徒・集団　　普通　科　１年生Ａ組・Ｂ組８６人（内訳　男子46人　女子40人　）
科　　目　　名　　数学α　　　　（4単位）
使 用 教 科 書　　数学Ⅰ　新訂版　（実教出版）　　　チャート式数Ⅰ＋Ａ（数研出版）

1　単元（題材）名　　第４章　図形と計量　２．三角比と図形

2　単元（題材）の目標

(1) 三角比の意味やその基本的な性質を理解する。【知識・理解】

(2) 三角比を用いた計量の考えの有用性を認識し、積極的に活用しようとする。
【関心・意欲・態度】

(3) 三角比を図形の問題の考察に応用することができる。
【表現・処理】【数学的な見方・考え方】

3　指導に当たって

（１）生徒の状況

標準的な数学の内容については、よく理解していて、数学的な定義を理解し、そこから導かれる新たな定理などの証明もきちんと理解している生徒もいるが、基本的な内容からじっくり時間をかけて理解しないといけない生徒もいる。１年生の教育実習明けということもあり、高校で新しく学んだ三角比の学習状況には個人差がある。

（２）指導方針・方法

自宅予習及び課題として、教科書・問題集の問題を解かせて定期的にノートを集め、生徒の理解度をチェックしている。授業では独自のプリントを用いて、より発展的な問題や数学的に面白い問題を考えさせるように工夫している。

この単元の正弦定理・余弦定理については、中学校で学習した三角形の合同条件との関係を考え、１辺と両端の角から他辺の長さを求めるには正弦定理、２辺夾角から対辺の長さ、或いは３辺の長さから角の大きさを求めるには余弦定理、といった演習はある程度積んでいる。本時では、三角比を用いた証明の簡便さと、等積変形を用いた三角比を使わない余弦定理（鋭角三角形）の証明を通して、定理の各項の意味する面積を生徒たち自身が発見できる授業を目指す。鈍角三角形については授業では扱わず、事後の課題とすることで、生徒の学習意欲を喚起したい。

4　単元（題材）の指導計画（総時数　17　時間）

第一次　　三角比　　（　6　時間）
第二次　　三角比と図形　（　5　時間）
　　１時　　正弦定理
　　２時　　余弦定理
　　３時　　正弦定理・余弦定理の応用①
　　４時　　正弦定理・余弦定理の応用②
　　５時　　正弦定理・余弦定理の応用③　・・・本時
第三次　　図形の計量　（　6　時間）

5　本時の指導と評価の計画（第　二　次　第　５　時）

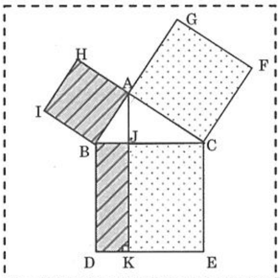
（１）本時のねらい

＊三平方の定理・余弦定理を等積変形の考え方を用いて考察する。【数学的な見方・考え方】
＊長方形の面積を三角比を用いて表すことができる。【表現・処理】

（２）準備・資料等　　ワークシート

（３）本時の展開

<table>
<tr><th>時間</th><th>学習内容</th><th>生徒の学習活動</th><th>教師の指導・留意点</th><th>評価規準
【観点】（評価方法）</th></tr>
<tr><td>10分</td><td>プリント配布
導入</td><td colspan="3">ユークリッド原論第Ⅰ巻　定理47
「直角三角形で、直角に対する辺上の正方形は直角にはさまれている正方形の和と等しい。」</td></tr>
<tr><td></td><td>問1</td><td>○「正方形の和」とは「2乗の和」であろうと推測し，三平方の定理を連想する。

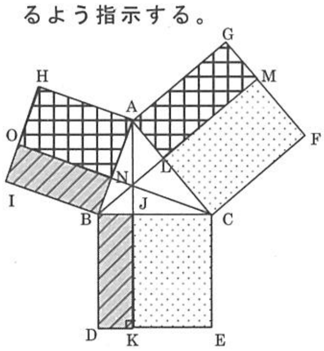
○三平方の定理を証明する。わからなければ，発表者のアイディアを共有する</td><td>発問この定理は，現在私たちが何と呼んでいるものですか
発問三平方の定理を証明できますか挙手を促し，数人の生徒に発表するよう指示する。

</td><td>○課題に意欲的に取り組んでいるか
【関心・意欲・態度】
（指名，観察）</td></tr>
<tr><td>15分</td><td>問2(1)

(2)

(3)</td><td>○三角比を用いて，長さBJを表す。
○長方形2つの面積が等しいことを，計算によって確認する
○小さい正方形2つの面積の和が大きい正方形の面積と等しいことを理解する。</td><td>○必要に応じて，直角三角形を抜き出す。
○もし生徒の発表で相似や等積変形のアイディアが出なければ，(3)定理47の証明を発問・指名する。
【考察1】で，「三角比を使わずに(2)が示せないか？」と発問する。
○もし生徒の発表で相似や等積変形のアイディアが出た場合は，その別証であることを強調し，以後の【考察1】でそれらを例示する。</td><td>○三角比を用いて図形の長さや面積を表すことができる【表現・処理】（発問・指名）</td></tr>
<tr><td>15分</td><td>展開
問3</td><td colspan="3">ユークリッド原論第Ⅱ巻　定理13
「鋭角三角形で，鋭角の対辺上の正方形は鋭角をはさむ2辺の上の正方形の和より，鋭角をはさむ辺のうちの1つとこの辺に垂線が下され，この鋭角への垂線によって内部に切り取られた線分によって囲まれている長方形の2倍小さい。」</td></tr>
<tr><td></td><td>(1)

(2)

(3)</td><td>○問2と同じように，三角比を用いて，ANの長さを表し，網掛けの長方形の面積が等しいことを理解する。

○(※)を確認する。</td><td>○同値な言い換え(問3※)を考えるよう指示する。

</td><td>○三角比を用いて図形の長さや面積を表すことができる【表現・処理】（発問・指名）

○面積の等式が鋭角三角形の余弦定理を表していると判断することができる。</td></tr>
<tr><td></td><td>(4)</td><td></td><td>発問定理13は現在私たちが何と呼んでいる定理のことですか。
発問三角比のなかった当時，どのように(2)を示したと思いますか。</td><td>【数学的な見方・考え方】（発問・指名）</td></tr>
<tr><td>5分</td><td>まとめ</td><td></td><td>【考察2】ヒントを与え，定理12（鈍角三角形の場合）とともに宿題とする。
○明朝プリントを提出するよう指示する。</td><td>○鈍角の場合が示せるか
【数学的な見方・考え方】（ワークシート）</td></tr>
</table>